Volume de um sólido de Revolução

Algumas aplicações da engenharia em estática, considerando um corpo extenso, e com distribuição continua de massa, uniforme ou não é necessário determinar-se e momento de inércia, centroide tanto de placas como de sólidos.

Neste sentido é necessário o conhecimento de cálculo para determinação de volumes e áreas superficiais. Nesta aula será desenvolvido o método para cálculo do volume de revolução de um sólido, que deverão ser aplicados nas disciplinas acima descritas.

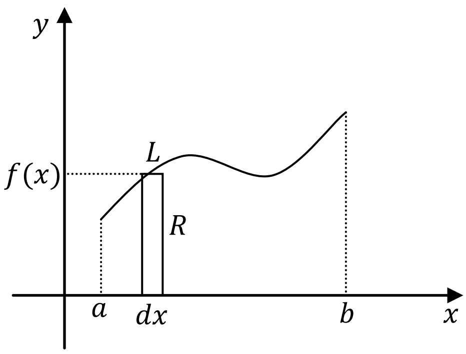
Um sólido de revolução é gerado pela rotação de uma área plana em torno de uma reta chamada eixo de rotação, contida no plano. O volume de sólido de revolução pode ser calculado por três métodos.

1. Método de disco
2. Método de arruela
3. Método de casca

Vejamos cada um dos métodos bem como alguns exemplos correspondentes

1. Método do disco.

   É útil quando o eixo de rotação e parte da fronteira da área De acordo com a figura abaixo.



Inicialmente vamos lembrar que o volume de um cilindro é dado por:

$$v = \pi R^2 L$$

$$\pi R^2 \rightarrow área\ da\ base$$

$$L = comprimento$$

No gráfico acima, consideramos o eixo x como sendo eixo de revolução, podemos calcular o volume formado pelo retângulo indicado que:

$$R = f(x)$$

$$L = dx$$

Desta forma o elemento de volume dv é dado por $dv = \pi[f(x)]^2 dx$ que corresponde a um disco cilíndrico em torno do eixo x. Para saber o volume do sólido, basta somar-se o volume de cada disco desde a até b, o que corresponde a integrar a expressão $dv = \pi[f(x)]^2 dx$.

Volume de um sólido de Revolução

$$\int_0^v dv = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx$$

$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

O mesmo ocorre quando o eixo de revolução é y. O volume fica:

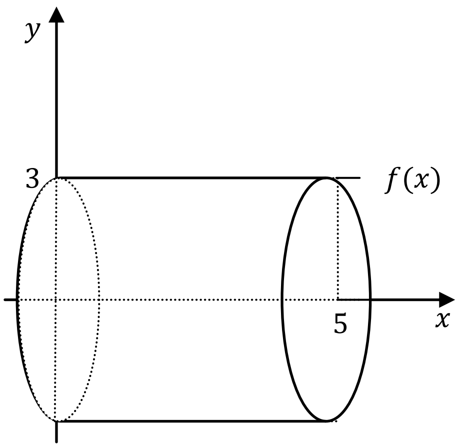
$$v = \pi \int_c^d [f(y)]^2\, dy$$

Vamos verificar um exemplo bem comportado.

Exemplo1:

Dado uma função definida como $f(x) = 3$, determine o volume do sólido de revolução no intervalo $x = 0\ \ a\ \ x = 5$.

O gráfico da função é:



Aplicando a equação:

$$v = \pi \int_0^5 3^2 dx = \left.\pi 9x\right|_0^5 = 45\pi\ u.v.$$

$u.v.$= unidade de volume

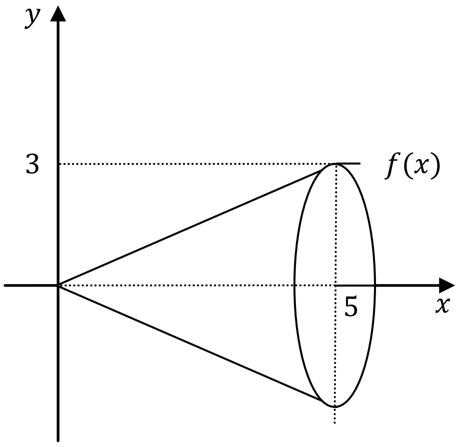
A equação corresponde ao cálculo de volume de um cilindro regular.

Exemplo 2:

Dada a função $f(x) = \frac{3x}{5}$ determine o volume do sólido de revolução no intervalo $x = 0\ \ a\ \ x = 5$.

O gráfico da função

Volume de um sólido de Revolução



A revolução correspondente a um cone. Aplicando a definição, tem-se:

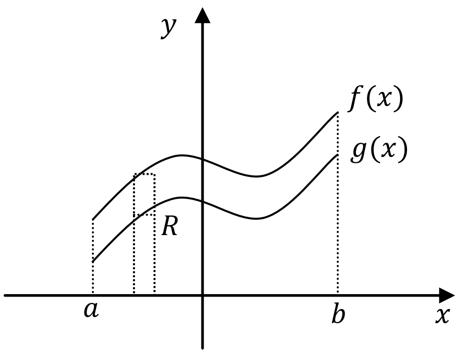
$$v = \pi \int_0^5 \left(\frac{3x}{5}\right)^2 dx = \frac{\pi 9}{25} \int_0^5 x^2 dx = \frac{9\pi}{25} \frac{x^3}{3}\Big|_0^5$$

$$= \frac{3\pi}{25} 25.5 = 15\pi \quad u.v$$

Pode-se observar que o volume do cone é $\frac{1}{3}$ do volume do cilindro de mesmo raio da base e mesmo comprimento.

2. Método de Arruela

É útil no caso em que o eixo de revolução não faz parte da área plana observe a figura.



Sabendo que $f(x)$, calcula-se a diferença entre o elemento de volume cilíndrico de cada uma das funções obtendo o elemento de volume da arruela e integrar-se:

$$dv_f = \pi[f(x)]^2 dx \rightarrow elemento\ de\ volume\ do\ disco\ maior$$

$$dv_g = \pi[g(x)]^2 dx \rightarrow elemento\ de\ volume\ do\ disco\ menor$$

$$dv = dv_f - dv_g = \pi\left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right] dx \rightarrow elemento\ de\ volume\ da\ arruela$$

Volume de um sólido de Revolução

Integrando:

$$v = \pi \int_a^b \left[\left(f(x) \right)^2 - \left(g(x) \right)^2 \right] dx$$

Quando o eixo de revolução for y o caso é análogo

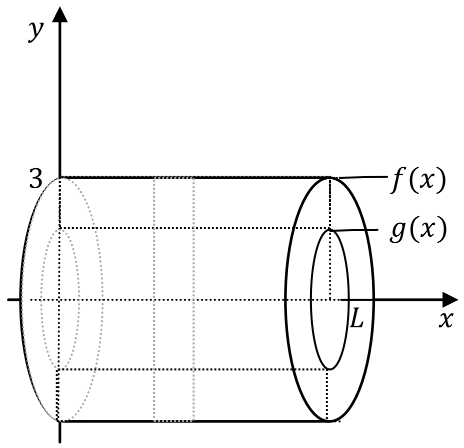
$$v = \pi \int_a^b \left[\left(f(y) \right)^2 - \left(g(y) \right)^2 \right] dy$$

Vamos calcular no próximo exemplo o volume de um tubo cilíndrico.

Exemplo 3:

Determine o volume de um tubo dado pelas funções $f(x) = R\ e\ \ g(x) = r$ sendo $f(x) > g(x)$ no intervalo de $x = 0\ a\ x = L$.

No gráfico:



Aplicando-se na equação:

$$v = \pi \int_a^b \left[\left(f(x) \right)^2 - \left(g(x) \right)^2 \right] dx$$

Temos:

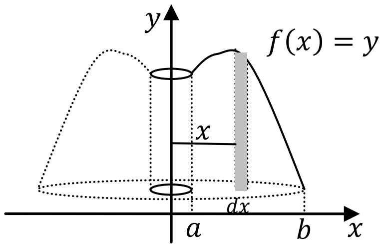
$$v = \ \pi \int_0^L (R^2 - r^2) dx = \pi (R^2 - r^2) \int_0^L dx$$
$$= \pi (R^2 - r^2) x|_0^L = \pi (R^2 - r^2)(L - 0)$$
$$= \pi (R^2 - r^2) L \ \ u.v.$$

Volume de um sólido de Revolução

3. Método da Casca

   Neste método define-se uma casca de espessura $dx (ou\ dy)$ para revolução em torno do eixo y $(ou\ x)$ determine o volume da casca e integra-se.

   Observando a figura



   Vamos determinar o volume da casca que definirá o sólido de revolução em torno do eixo y.

   - A casca possui espessura dx.
   - A casca possui altura y.
   - A casca possui raio x.

O elemento de volume dos sólidos dv ou o volume da casca cilíndrica é: o comprimento da curva vezes a espessura vezes altura da casca.

$$dv = 2\pi xydx$$

Integrando a função, obtêm-se:

$$v = 2\pi \int_a^b xydx$$

$$v = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

Lembrando que a revolução é em torno do eixo y.

Analogamente, para revolução no eixo x

$$v = 2\pi \int_a^b yf(y)dy$$

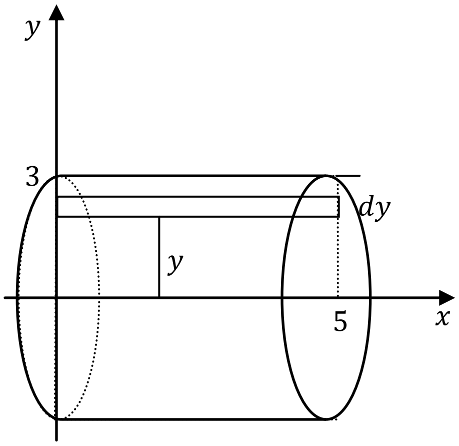
No próximo exemplo vamos trabalhar com a mesma situação do Exemplo 1 adequando-se a função.

Exemplo 4:

Dada a função definida por f(x)=5, determine o volume do sólido de revolução em torno no eixo x para o intervalo y=0 a y=3, com o método da casca.

Observando o gráfico.

Volume de um sólido de Revolução



Definindo o elemento do volume tem-se:

$$dv = 2\pi \int_0^3 y f(y) dy$$

$$v = 2\pi \int_0^3 y.5dy = 10\pi \int_0^3 ydy$$

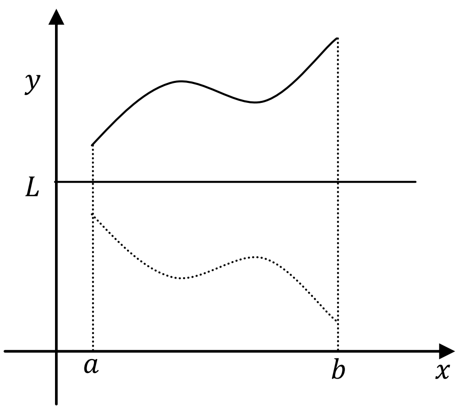
$$= 10\pi \frac{y^2}{2}\Big|_0^3 = 5\pi\,(9-0)$$

$$= 45\pi\, u.v.$$

Observe que indiferentemente do método utilizando o resultado é o mesmo.

<u>Rotação em torno de um eixo paralelo a um dos eixos coordenados.</u>

Supondo que se queira uma rotação em torno de um eixo paralelo a x ou a y.



Para o método do disco, basta subtrair da função a coordenada correspondente ao eixo paralelo e desta forma.

Volume de um sólido de Revolução

$$v = \int_a^b (f(x) - L)^2 dx$$

Com estas definições o aluno esta apto a calcular o volume de qualquer sólido de revolução, desde que conheça a função e os limites de integração.